Universidade Federal de São João del-Rei

Cíntia Coelho dos Santos

Uma Prova Topológica do Teorema Fundamental da Álgebra

São João del-Rei

Dezembro de 2019

Cíntia Coelho dos Santos

Uma Prova Topológica do Teorema Fundamental da Álgebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arnulfo Miguel Rodríguez Peña

São João del-Rei, _____ de __________ de ________

Banca Examinadora

____

Orientador: Prof. Dr. Arnulfo Miguel Rodríguez Peña

____

Profa. Dra. Ivana de Vasconcellos Latosinski

____

Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes

São João del-Rei
Dezembro de 2019

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço primeiro a Deus por ter me mantido no caminho certo durante todo este trabalho, com saúde, forças e sabedoria para chegar até o final. Sem Ele nada seria possível.

Aos meus pais, José Luiz e Maria das Dores, que sempre estiveram ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória. Sou grata por sempre me incentivarem e acreditarem que eu seria capaz de superar os obstáculos. Obrigada por todo o esforço investido na minha educação, confiança no meu progresso e pelo apoio emocional. Obrigada também, por fazerem do meu sonho, sonho seus e me ajudarem a realizá-lo.

Ao meu irmão, Thiago, por estar ao meu lado e por me fazer ter confiança nas minhas decisões. Pela amizade e atenção dedicadas quando sempre precisei. Por me incentivar a prosseguir na caminhada e por acreditar mais na minha capacidade do que eu mesma.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Arnulfo Miguel Rodríguez Peña, por todo apoio e paciência ao longo da elaboração deste trabalho e da iniciação científica. Agradeço por aceitar conduzir, pelo incentivo, pela sua dedicação e paciência durante o trabalho. Obrigada por me manter motivada durante todo o processo e por sempre me fazer pensar e questionar sobre o tema. Seus conhecimentos e suas valiosas contribuições dadas durante todo o processo fizeram grande diferença no resultado final deste trabalho.

Agradeço também a Profa. Dra. Ivana de Vasconcellos Latosinski e o Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes por aceitarem o convite de compor a minha banca de defesa e pelas contribuições ao trabalho.

Também quero agradecer à Universidade Federal de São João del-Rei pelas oportunidades proporcionadas. Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística, agradeço por compartilharem seus conhecimentos com muito profissionalismo e qualidade.

Por fim, agradeço à todos os meus colegas de curso pela oportunidade do convívio e pela cooperação mútua durante estes anos. Juntos conseguimos avançar e ultrapassar todos os obstáculos. Agradeço os inúmeros desafios que enfrentamos, sempre com o espírito colaborativo.

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência (a Matemática) *acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."*

— Carl Friedrich Gauss

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é o estudo de conceitos relacionados a Topologia Geral e uma introdução à Topologia Algébrica (homotopias). Para isto apresentamos alguns conceitos, definições e propriedades básicas de Topologia Geral como funções contínuas, topologia quociente, compacidade, conexidade, superfícies e, por fim, homotopia. Finalizamos este trabalho apresentando uma aplicação de homotopia, uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, que afirma que todo polinômio não constante possui pelo menos uma raiz.

Palavras-chave: Espaços Topológicos, Superfícies, Homotopia, Primeiro Grupo Fundamental, Teorema Fundamental da Álgebra.

Abstract

The main objective of this work is the study of concepts related to General Topology and an introduction to Algebraic Topology (homotopies). We first present some concepts, definitions and basic properties of General Topology as continuous functions, quotient topology, compactness, connectivity, surfaces and, finally, homotopy. We finish this work with a homotopy application; we present a proof of the Fundamental Algebra Theorem, which states that every non-constant polynomial has at least one root.

Keywords: Topological Spaces, Surfaces, Homotopy, The First Fundamental Group, Fundamental Algebra Theorem.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, temos como principal objetivo o estudo de conceitos relacionados a Topologia Geral e uma introdução a Topologia Algébrica (homotopias). Apresentamos, primeiramente, uma breve história sobre o surgimento da topologia, mencionando nomes de alguns matemáticos e depois desenvolvemos conceitos e resultados relacionados à topologia geral e topologia algébrica.

Segundo [6], pode-se considerar a Topologia como o estudo das propriedades das figuras geométricas que permanecem invariantes sob as chamadas transformações topológicas, isto é, sob aplicações contínuas que tem inversas também contínuas.

Sendo assim, podemos concluir que o estudo da continuidade é fundamental na Topologia, tornando-a um dos pilares da Matemática. Hoje a Topologia "talvez possa ser considerada, ao lado da geometria, da álgebra e da análise, como uma das partes fundamentais da Matemática"[6].

Ao se transformar uma figura geométrica em outra qualquer, a partir de transformações topológicas, dizemos que ambas são homeomorfas ou topologicamente equivalentes. As propriedades preservadas por essas transformações são chamadas propriedades topológicas.

De acordo com [3], a Topologia é considerada um ramo essencial na Matemática, podendo ser dividida em dois sub-ramos: Topologia Combinatória e Topologia dos Conjuntos de Pontos. Ainda segundo ele, a Topologia Combinatória "é o estudo de aspectos qualitativos intrínsecos das configurações espaciais que permanecem invariantes por transformações biunívocas contínuas com inversa contínua".

A Topologia é também conhecida como "geometria de borracha", pois podemos deformar um cubo em uma esfera, por exemplo, sem cortá-lo, fazendo uso das propriedades topológicas. Outro exemplo é dizer que "um círculo é topologicamente equivalente a uma elipse"[3]. Porém, não é possível transformar uma faixa cilíndrica numa faixa de Mobius (Figura 1.1) através de transformações topológicas. A faixa de Mobius é um objeto não orientável (possui apenas um lado) com apenas um bordo. Já a faixa cilíndrica é orientável (possui dois lados) com dois bordos.

Este trabalho está divido em três capítulos, nos quais apresentamos definições, teoremas e exemplos para facilitarem a compreensão do conteúdo.

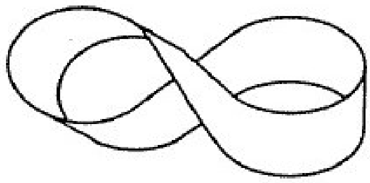

Figura 1.1: Faixa de Mobius.

No capítulo 2, apresentamos um breve histórico relatando o surgimento da Topologia e alguns colaboradores essenciais para seu desenvolvimento.

No capítulo 3, trataremos de definições, teoremas, corolários, lemas e exemplos relacionados a Espaços Topológicos: Subespaços Topológicos, Conjuntos Fechados e Espaços Hausdorff.

No capítulo 4, continuaremos com algumas definições, teoremas, corolários, lemas e exemplos sobre os principais conceitos de Topologia, abordando: Funções Contínuas, Relações de Equivalência, Espaços Compactos e Conexos, Superfícies e Característica de Euler.

No último capítulo, capítulo 5, tratamos de alguns conceitos preliminares necessários para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Neste capítulo, abordamos conceitos importantes de homotopia e Grupo Fundamental. Terminamos com a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra e alguns corolários.

Esperamos que este trabalho possa ser utilizado por estudantes de graduação que desejam conhecer e estudar Topologia.

Capítulo 2

Breve História

A Topologia começou como um ramo da geometria. Historicamente considera-se que a topologia nasceu no problema das pontes de Königsberg. O problema se refere a uma cidade da Prússia chamada Königsberg que possuía duas ilhas cortadas pelo Rio Pregel. Na época, seis pontes ligavam as ilhas à cidade e a outra conectava as duas ilhas entre si (como mostra a Figura 2.1). O problema era andar pela cidade de forma a passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto inicial. De acordo com [13], em 1735, Leonhard Paul Euler (1707-1783) divulgou uma resolução deste importante problema, porém percebeu que o problema pouco, ou nada, tinha a ver com geometria. O importante era estabelecer uma rede - grafo - que representasse o rio e as pontes, passando assim a trabalhar com vértices e arestas, interessando-se somente pela forma como os vértices estavam ligados entre si.

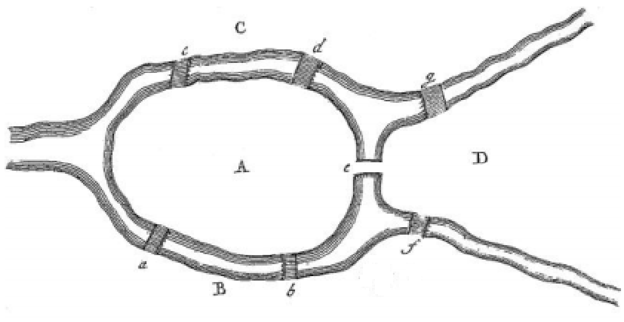

Figura 2.1: As sete pontes de Könisberg, veja em [10].

Segundo [6], "perto do fim do século XVII, Gotfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) usou o termo geometria situs para designar uma espécie de Matemática qualitativa que hoje seria considerada como parte da topologia". A Topologia também foi utilizada em obras de Leonhard Paul Euler, August Ferdinand Mobius (1790-1868) e Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918). Segundo [3] "a palavra "topologia" fora usada em 1847 por Johann Benedict Listing (1808-1882) no título de um livro, Vorstudien zur Topologie (Estudos introdutórios em topologia)". Mais tarde Jules Henri Poincaré (1854-1912) publicou o livro Analysis Situs em 1895 favorecendo o seu desenvolvimento. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) que empregou propriedades topológicas em duas das várias demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra.

A noção de figura geométrica como forma de um conjunto finito de partes fundamentais ligadas entre si, do modo apresentado por Mobius, Riemann e Poincaré, que ficou conhecida como Topologia Conjuntiva, gradualmente deu lugar ao conceito cantoriano de um conjunto arbitrário de pontos, reconhecendo-se que qualquer conjunto de objetos pode constituir, em algum sentido, um espaço topológico conhecido como Topologia Combinatória ou Topologia Algébrica. Segundo [6], a estruturação da Topologia Conjuntiva emergiu em 1914 do livro Grundzuge der Mengenlehre de Félix Hausdorff (1868-1942). Ele "é uma exposição sistemática dos aspectos característicos da teoria dos conjuntos, em que a natureza dos elementos não tem importância, só as relações entre os elementos são importantes"[3]. Além disso, ele apresenta uma abordagem dos espaços topológicos hoje conhecidos como espaços de Hausdorff a partir de uma coleção de axiomas.

Em 1985, Jules Henri Poincaré introduziu os conceitos de homotopia e homologia, sendo considerado como o início da Topologia Algébrica. Um dos resultados mais importantes da Topologia na Matemática e na Física é a conjectura de Poincaré, considerada como um dos sete problemas do milênio pelo Clay Mathematics Institute (Cambrigde, Massachussetts), que foi resolvida pelo matemático russo Grigori Yakovlevich Perelman em 2002. A conjectura estabelece que a 3-esfera é a única 3-variedade (topológica) compacta e conexa em que todo círculo fechado pode se deformar continuamente num ponto (nosso universo poderia ser uma 3-esfera). Ou seja, se X é uma 3-variedade compacta e conexa com $\pi_1(X) = 0$, então X é uma 3-esfera, $X = S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1\}$.

Espaços topológicos estão presentes em vários ramos da Matemática, tendo importância também na Física e Estatística. Entre alguns exemplos na Matemática temos: os espaços vetoriais normados (em áreas como geometria, análise e equações diferenciais), as variedades algébricas com a Topologia de Zariski (em geometria algébrica) e a Topologia de Krull em teoria de Galois para extensões de corpos de grau infinito (em álgebra).

Figura 2.2: Henri Poincaré, França, 1854-1912, veja [2].

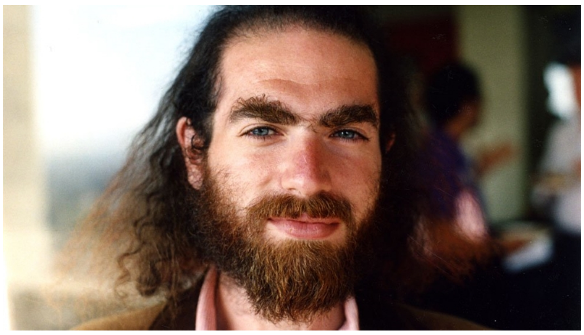

Figura 2.3: Grigori Perelman, Rússia, 1966, veja [1].

Capítulo 3

Espaços Topológicos

A partir de agora, apresentaremos algumas definições, teoremas, proposições, lemas e alguns exemplos que serão essenciais para este trabalho. Os resultados a seguir têm como referências [5], [7], [8], [9], [11] e [12].

Definição 3.1. *Seja X um conjunto. Uma topologia τ em X é uma coleção qualquer de subconjuntos de X tais que:*

(i) *X e $\varnothing$ pertencem a τ;*

(ii) *Se $\{U_i \mid i \in I\} \subset \tau$, então $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$, ou seja, a união de um número qualquer de elementos pertencentes a τ pertence a τ;*

(iii) *Se $U_1, ..., U_m \in \tau$, então $U_1 \cap ... \cap U_m \in \tau$, ou seja, a interseção de um número finito de elementos pertencentes a τ também pertence a τ.*

Um conjunto X para o qual uma topologia τ foi especificada é chamado espaço topológico. Assim um espaço topológico é um par ordenado (X, τ) sendo X um conjunto e τ uma topologia em X.

Se X é um espaço topológico com a topologia τ, dizemos que um subconjunto U de X é um conjunto aberto ou simplesmente um aberto de X.

Exemplo 3.1. *Consideremos as seguintes classes de subconjuntos de $X = \{a, b, c, d, e\}$:*

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}; \\ \tau_2 &= \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}; \\ \tau_3 &= \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}. \end{aligned}$$

Note que τ_1 é uma topologia de X, pois satisfaz os axiomas (i),(ii) e (iii). Já τ_2 não o é, pois a união $\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$ não pertence a τ_2, não sendo satisfeito o axioma (ii). Temos também que τ_3 não é uma topologia em X, pois a interseção $\{a, c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, d\}$ não pertence a τ_3 não sendo, assim, satisfeito o axioma (iii).

Exemplo 3.2. *Se X é um conjunto qualquer, a coleção de todos os subconjuntos de X é uma topologia de X chamada topologia discreta. A coleção que consiste apenas de X e $\varnothing$ é também uma topologia de X chamada topologia trivial.*

Definição 3.2. *Suponha que τ e τ' são duas topologias de um dado conjunto. Se $\tau \subset \tau'$, dizemos que τ' é mais fina que τ (τ' tem mais abertos que τ).*

Exemplo 3.3. *Seja X um conjunto. Qualquer topologia em X é mais fina que a topologia trivial e a topologia discreta é mais fina que qualquer topologia em X.*

Definição 3.3. *Seja X um conjunto, uma base para uma topologia em X é uma coleção $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X tais que:*

(i) $\forall x \in X$, $\exists U_x \in \mathscr{B}$ *tal que* $x \in U_x$, *ou seja, para cada elemento de X há pelo menos um elemento da base $\mathscr{B}$ contendo esse elemento;*

(ii) *Seja $x \in X$ e $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ tais que $x \in U_1 \cap U_2$, então existe $U_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U_3$ e $U_3 \subset U_1 \cap U_2$. De outro modo, podemos dizer que se x pertence a interseção de dois elementos da base U_1 e U_2, então há um elemento da base U_3 contendo x tal que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.*

Definição 3.4. *Seja X um conjunto e $\mathscr{B}$ uma base para uma topologia em X. A topologia $\tau_{\mathscr{B}}$ induzida pela base $\mathscr{B}$ é definida por*

$$U \in \tau_{\mathscr{B}} \Longleftrightarrow U = \bigcup_{U_i \in \mathscr{B}} U_i,$$

equivalentemente,

$$U \in \tau_{\mathscr{B}} \Longleftrightarrow \forall x \in U, \exists U_x \in \mathscr{B} \text{ tal que } x \in U_x \subset U,$$

ou seja, $\tau_{\mathscr{B}}$ é a coleção de todas as uniões arbitrárias de elementos de $\mathscr{B}$. É possível mostrar que $\tau_{\mathscr{B}}$ é uma topologia em X.

Definição 3.5. *Seja $p \in \mathbb{R}^n$ e ε um número real positivo. A bola aberta de centro p e raio ε é o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto p de X é menor que ε. Ou seja,*

$$B(p,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| < \varepsilon\}.$$

Exemplo 3.4. *Seja $X = \mathbb{R}^n$. Dado onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, defina*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

A coleção de subconjuntos de X,

$$\mathscr{B} = \{B(p,\varepsilon) \mid p \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}, \text{ onde } B(p,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| < \varepsilon\},$$

é uma base para uma topologia de X. A topologia induzida pela base $\mathscr{B}$ é chamada a topologia usual de $\mathbb{R}^n$.

De agora em diante, a menos que se fale o contrário, vamos considerar $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual.

Exemplo 3.5. *Seja $\mathscr{B}$ a classe de intervalos semi-abertos em $\mathbb{R}$,*

$$\mathscr{B} = \{\langle a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Obviamente $\mathbb{R}$ é a união de membros de $\mathscr{B}$, pois todo número real pertence a alguns intervalos semi-abertos. Além disso, a interseção $\langle a, b] \cap \langle c, d]$ de dois desses intervalos ou é vazio ou é outro intervalo semi-aberto. Por exemplo:
Se $a < c < b < d$, então, $\langle a, b] \cap \langle c, d] = \langle c, b]$ conforme indicado na Figura 3.1.
Assim, a classe τ constituída de uniões de intervalos semi-abertos é uma topologia em $\mathbb{R}$, isto é, $\mathscr{B}$ é base para uma topologia τ em $\mathbb{R}$.

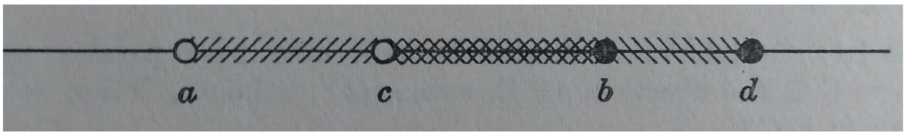

Figura 3.1: Intervalos semi-abertos, veja em [9].

Exemplo 3.6. *Os intervalos abertos formam uma base para a topologia usual em $\mathbb{R}$. Pois se $X \subset \mathbb{R}$ é aberto e $p \in X$, então, por definição, existe um intervalo aberto (a, b) com $p \in (a, b) \subset X$.*

Analogamente, os discos abertos $B(p, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - p\| < \varepsilon\}$ formam uma base para a topologia usual do $\mathbb{R}^2$.

Proposição 3.1. *Seja (X, τ) espaço topológico. Seja $\mathscr{C}$ uma coleção de abertos de τ tal que:*

$$\forall U_x \in \tau \text{ com } x \in U_x, \exists C \in \mathscr{C} \text{ tal que } x \in C \subset U_x.$$

Então $\mathscr{C}$ é uma base para a topologia τ de X. Em outras palavras:
Seja X um espaço topológico. Suponha que $\mathscr{C}$ é uma coleção de conjuntos abertos de X tal que para cada conjunto aberto U de X e cada x em U, há um elemento C de $\mathscr{C}$ tal que $x \in C \subset U_x$. Então $\mathscr{C}$ é uma base para a topologia de X.

Proposição 3.2. *Seja X um conjunto. Sejam $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ bases das topologias $\tau_{\mathscr{B}}$ e $\tau_{\mathscr{B}'}$, respectivamente. São equivalentes:*

(i) *$\tau_{\mathscr{B}} \subset \tau_{\mathscr{B}'}$ ($\tau_{\mathscr{B}'}$ é mais fina que $\tau_{\mathscr{B}}$);*

(ii) *$\forall x \in X$ e $U_x \in \mathscr{B}$ com $x \in U_x$, $\exists U'_x \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in U'_x \subset U_x$, ou seja, para cada $x \in X$ e cada elemento da base $U_x \in \mathscr{B}$ contendo x, há um elemento da base $U'_x \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in U'_x \subset U_x$.*

Definição 3.6. *Sejam X e Y espaços topológicos. A topologia produto em $X \times Y$ é a topologia tendo como base a coleção $\mathscr{B}$ de todos os conjuntos da forma $U \times V$, onde U é um subconjunto aberto de X e V um subconjunto aberto de Y.*

Exemplo 3.7. *A topologia usual em $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é a topologia produto.*

Teorema 3.1. *Se $\mathscr{B}$ é uma base para a topologia de X e $\mathscr{C}$ é uma base para a topologia de Y, então a coleção*

$$\mathscr{D} = \{B \times C \mid B \in \mathscr{B} \text{ e } C \in \mathscr{C}\},$$

é uma base para a topologia de $X \times Y$.

Definição 3.7. *Sejam $\pi_1 : X \times Y \to X$ a função definida por*

$$\pi_1(x, y) = x;$$

e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ a função definida por

$$\pi_2(x, y) = y.$$

Chamamos π_1 e π_2 de projeções de $X \times Y$.

Temos que:

1) As projeções π_1 e π_2 são sobrejetoras,

2) Sejam τ_x e τ_y topologias em X e Y, respectivamente, então,

$$\begin{aligned} &\text{se } U \in \tau_x \Longrightarrow \pi_1^{-1}(U) \text{ é aberto em } X \times Y, \\ &\text{se } V \in \tau_y \Longrightarrow \pi_2^{-1}(V) \text{ é aberto em } X \times Y. \end{aligned}$$

Em particular, π_1 e π_2 são contínuas.

3.1 Subespaço topológico

Definição 3.8. *Seja X um espaço topológico com a topologia τ. Seja Y um subconjunto de X, considere*

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}.$$

A classe τ_Y de todas as interseção de Y com os subconjuntos abertos de X é uma topologia em Y, chamada topologia relativa em Y. Dizemos que Y é um subespaço topológico de X.

Exemplo 3.8. *Considere a topologia*

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

em $X = \{a, b, c, d, e\}$ e o subconjunto $A = \{a, d, e\}$ de X. Observe que

$$X \cap A = A, \qquad \{a\} \cap A = \{a\}, \qquad \{a, c, d\} \cap A = \{a, d\},$$

$$\varnothing \cap A = \varnothing, \qquad \{c, d\} \cap A = \{d\}, \qquad \{b, c, d, e\} \cap A = \{d, e\}.$$

Logo, a relativização de τ para A é

$$\tau_A = \{A, \varnothing, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}.$$

Lema 3.1. *Se $\mathscr{B}$ é uma base para a topologia de X, então a coleção*

$$\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathscr{B}\},$$

é uma base para o subespaço topológico Y.

Quando estivermos lidando com um espaço X e um subespaço Y, precisamos tomar cuidado ao usarmos o termo "conjunto aberto". Este significa um elemento da topologia de Y ou um elemento da topologia de X?

Tomaremos a seguinte definição: Se Y é um subespaço de X, dizemos que U é aberto em Y (ou aberto relativo em Y) se ele pertence a topologia de Y, isso implica, em particular, que ele é um subconjunto de Y. Dizemos que U é aberto em X se ele pertence a topologia de X.

Lema 3.2. *Dado Y um subespaço de X. Se U é aberto em Y e Y é aberto em X, então U é aberto em X.*

Lema 3.3. *Dado A subespaço de X e B subespaço de Y. Então a topologia produto de $A \times B$ é a topologia de $A \times B$ como subespaço de $X \times Y$.*

3.2 Conjuntos fechados

Definição 3.9. *Um subconjunto A de um espaço topológico X é dito fechado se o conjunto $X - A$ é aberto.*

Exemplo 3.9. *Considere $X = \mathbb{R}$ com a topologia usual. O intervalo $[a, b]$ é um subconjunto fechado, pois seu complementar $(-\infty, a) \cap (b, +\infty)$, que é a união de dois intervalos abertos e infinitos, é aberto.*

Teorema 3.2. *Seja X um espaço topológico, então:*

(i) *$\varnothing$ e X são fechados;*

(ii) *Interseção arbitrária de fechados é fechado;*

(iii) *União finita de fechados é fechado.*

Teorema 3.3. *Dado Y um subespaço de X. Então um subconjunto A de Y é fechado em Y se, e somente se, ele é igual a interseção de um conjunto fechado de X com Y.*
Simbolicamente,

$$A \subset Y \text{ é } fechado \Leftrightarrow A = Y \cap F, onde\ F \subset X \text{ é } fechado.$$

Corolário 3.1. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $Y \subset X$ um subespaço. Se A é fechado em Y e Y é fechado em X, então A é fechado em X.*

Dado um subconjunto A de um espaço topológico X, o interior de A é definido como a união de todos os conjuntos abertos que estão contidos em A, e o fecho de A é definida como a interseção de todos os conjuntos fechados contendo A.
Simbolicamente,
interior:

$$\mathring{A} = \bigcup_{\begin{cases} U_i \in \tau \\ U_i \subset A \end{cases}} U_i,$$

fecho:

$$\overline{A} = \bigcap_{\begin{cases} F_i\, fechado \\ A \subset F_i \end{cases}} F_i.$$

Observação 3.1. *i) O interior de A é denotado $Int\ A$ ou $\mathring{A}$ e o fecho de A é denotada por $\overline{A}$;*

ii) Evidentemente $\mathring{A}$ é um conjunto aberto e $\overline{A}$ é um conjunto fechado. E além disso, $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;

iii) Se A é aberto, então $A = \mathring{A}$;

iv) Se A é fechado, então $A = \overline{A}$.

Exemplo 3.10. *Seja X um espaço topológico cofinito, isto é, os complementos de conjuntos finitos e $\varnothing$ são os conjuntos abertos. Então, os fechados são, precisamente, os conjuntos finitos de X e o próprio X. Logo, se $A \subset X$ é finito, seu fecho $\overline{A}$ é o próprio A, pois A é fechado. Por outro lado, se $A \subset X$ é infinito, então X é o único fechado que contém A; então, $\overline{A}$ coincide com X. Mais concisamente, para qualquer subconjunto A de um espaço cofinito,*

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & se\ A\ é\ finito \\ X, & se\ A\ é\ infinito. \end{cases}$$

Proposição 3.3. *Seja A um subconjunto do espaço topológico X.*

(a) *Então* $x \in \mathring{A}$ *se, e somente se, existe um conjunto aberto* U *contendo* x *contido em* A. *Simbolicamente,*

$$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists U \in \tau \mid x \in U \subset A.$$

(b) *Então* $x \in \overline{A}$ *se, e somente se, todo conjunto aberto* U *contendo* x *intersecta* A. *Simbolicamente,*

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall U \in \tau \mid x \in U \Longrightarrow U \cap A \neq \varnothing.$$

Definição 3.10. *Seja* X *um espaço topológico e* U *um subconjunto aberto de* X. *Se* $x \in U$, *dizemos que* U *é uma vizinhança de* x.

Proposição 3.4. *Se* A *é um subconjunto do espaço topológico* X, *então* $x \in \overline{A}$ *se, e somente se, toda vizinhança de* x *intersecta* A.

Definição 3.11. *Se* A *é um subconjunto de um espaço topológico* X *e se* x *é um ponto de* X, *dizemos que* x *é um ponto limite (ou ponto de acumulação) de* A *se toda vizinhança de* x *intersecta* A *em algum ponto diferente do próprio* x. *De outra maneira,* x *é um ponto limite de* A *se ele pertence ao fecho de* $A - \{x\}$. *O ponto* x *pode estar inteiramente em* A *ou não. Assim temos que* x *é ponto limite de* A *se,*

$$\forall U \in \tau \text{ com } x \in U, (U - \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Definição 3.12. *Denotamos por* A' *o conjunto de todos os pontos de acumulação de* A.

Exemplo 3.11. *Seja* $X = \mathbb{R}$ *(com a topologia usual) e* $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\right\}$, *então* 0 *é o único ponto limite de* A. *Todos os outros pontos de* $x \neq 0$ *de* $\mathbb{R}$ *têm uma vizinhança que não intersecta* A, *ou intersecta* A *apenas no próprio* x.

Teorema 3.4. *Seja* A *um subconjunto do espaço topológico* X. *Então* $\overline{A} = A \cup A'$.

Corolário 3.2. *Um subconjunto do espaço topológico é fechado se, e somente se, ele contém todos os seus pontos limites, ou seja, sendo* X *um espaço topológico e* $A \subset X$,

$$A \text{ é } fechado \iff A' \subset A.$$

3.3 Espaço de Hausdorff

Definição 3.13. *Um espaço topológico* X *é chamado um espaço Hausdorff se para cada* $a, b \in X (a \neq b)$ *existem* U_a *e* U_b *vizinhanças disjuntas de* a *e* b *respectivamente, ou seja, dois pontos distintos quaisquer pertencem sempre a abertos disjuntos.*

É possível provar que subespaços e produtos de espaços Hausdorff é Hausdorff.

Exemplo 3.12. *Considere* $X = \{a, b, c\}$ *com a topologia* $\tau = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \varnothing, X\}$. *Então* X *com a topologia* τ *não é espaço de Hausdorff pois* $a, c \in X$ *e não possuem vizinhanças disjuntas.*

Definição 3.14. *Seja X espaço topológico, uma sequência, $a_1, a_2, ...,$ de pontos de X converge para $a \in X$ se para toda U_a vizinhança de a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ implica que $a_n \in U_a$.*

Teorema 3.5. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff, então toda sequência converge no máximo para um ponto.*

Notação 3.1. *Seja X espaço topológico Hausdorff e $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sequência convergente para $a \in X$, denotamos*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{ou} \quad a_n \to a.$$

Definição 3.15. *Seja X espaço topológico $A \subset X$ um subconjunto. O bordo de A é definido por*

$$Bd(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}.$$

Capítulo 4

Principais Conceitos de Topologia Geral

4.1 Funções contínuas

Os resultados a seguir têm como referências [5], [7], [8], [9], [11] e [12].

Definição 4.1. *Seja X e Y espaços topológicos. A função $f : X \to Y$ é contínua se para todo aberto U em Y, $f^{-1}(U)$ é aberto em X.*

Proposição 4.1. *Seja $\mathscr{B}_Y$ base da topologia em Y. Então:*

$$f : X \to Y \text{ é contínua } \iff \forall\ U \in \mathscr{B}_Y, f^{-1}(U) \text{ é aberto em } X.$$

Em cálculo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\mid x - x_0 \mid < \delta \Longrightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \varepsilon.$$

Mais geralmente: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon,$$

$$isto\ é,\ se\ x \in B(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon),$$

$$ou\ seja,\ f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$

Para este caso, escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Lembrando que, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

De modo geral, dados X e Y espaços topológicos, dizemos que uma função $f : X \to Y$ é contínua em $x_0 \in X$, se para cada vizinhança V de $f(x_0)$, há uma vizinhança U de x_0 tal que $f(U) \subset V$.

Proposição 4.2. *Uma função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = \big(f_1(x), ..., f_m(x)\big)$ *é contínua se, e somente se,* $f_1, ..., f_m$ *são contínuas.*

Observação 4.1. *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma função e* $p \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to p} f_1(x) = f_1(p) \\ \vdots \\ \lim\limits_{x\to p} f_m(x) = f_m(p). \end{cases}$$

Teorema 4.1. *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos e* $f : X \to Y$ *uma função. São equivalentes:*

(1) f *é contínua;*

(2) *Para todo subconjunto* A *de* X, *temos* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(3) *Para todo conjunto fechado* B *de* Y, *o conjunto* $f^{-1}(B)$ *é fechado em* X;

(4) *Para cada* $x \in X$ *e cada vizinhança* V *de* $f(x)$, *há uma vizinhança* U *de* x *tal que* $f(U) \subset V$. *Ou seja,* f *contínua em* $x \in X$.

Observação 4.2. *Em particular, o Teorema* 4.1 *diz que:* f *é contínua se, e somente se,* f *é contínua em cada* $x \in X$.

Teorema 4.2. *Seja* X, Y *e* Z *espaços topológicos.*

1) (*Função constante*) *Seja* $y_0 \in Y$. *Então* $f : X \to Y$ *tal que* $f(x) = y_0$, *para todo* $x \in X$ *é contínua;*

2) (*Inclusão*) *Seja* A *um subespaço de* X. *Então* $j : A \to X$ *tal que* $j(x) = x$, *para todo* $x \in A$ *é contínua;*

3) (*Composição*) *Se* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *são contínuas, então* $g \circ f : X \to Z$ *é contínua;*

4) (*Restrição e extensão da imagem*) *Seja* $f : X \to Y$ *contínua*

   (*a*) *Se* $Z \subset Y$ *é subespaço tal que* $f(X) \subset Z$, *então* $g : X \to Z$ *tal que* $g(x) = f(x)$, *para todo* $x \in X$ *é contínua;*

   (*b*) *Seja* $Y \subset Z$ *subespaço. Então* $h : X \to Z$ *tal que* $h(x) = f(x)$, *para todo* $x \in X$ *é contínua.*

5) (*A continuidade é um fenômeno local*) *Uma função* $f : X \to Y$ *é contínua se, e somente se,* X *pode ser escrito como união de abertos* $X = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ *tal que* $f \mid U_\alpha$ *é contínua para todo* α.

Teorema 4.3 (Colagem)**.** *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos tal que* $X = A \cup B$ *com* A *e* B *fechados* (*ou abertos*). *Sejam* $f : A \to Y$ *e* $g : B \to Y$ *contínuas tal que* $f(x) = g(x), \forall x \in A \cap B$. *Então* $h : X \to Y$ *definida por:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

é contínua.

Definição 4.2. *Sejam X e Y espaços topológicos. Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Dizemos que f é um homeomorfismo se f e f^{-1} são contínuas, ou seja, $U \in X$ é aberto se, e somente se, $f(U) \in Y$ é aberto.*

Exemplo 4.1. *Seja $X = \langle -1, 1\rangle$. A função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = tg\left(\dfrac{1}{2}\pi x\right)$ é bijetora e contínua. Além disso, a inversa f^{-1} é também contínua. Logo, a reta real $\mathbb{R}$ e o intervalo aberto $\langle -1, 1\rangle$ são homeomorfos.*

Definição 4.3. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ injetora e contínua é chamada de mergulho se $f : X \to Z = f(X)$ é homeomorfismo (aqui $Z \subset Y$ tem a topologia induzida por Y).*
Notação: $X \hookrightarrow Y$ ou $X \subset Y$.

Definição 4.4. *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que X é isomorfo a Y se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$ e denotamos $X \equiv Y$. É possível mostrar que "$\equiv$" representa uma relação de equivalência, veja a Definição* 4.5.

Antes de passarmos para a próxima seção, lembremos o que é uma relação de equivalência. Conceito importante que será utilizado com frequência no restante do trabalho.

Definição 4.5. *Uma relação R em X é um subconjunto $R \subset X \times X$. Uma relação R em X é chamada uma relação de equivalência em X se satisfaz as seguintes propriedades:*

1) *Para todo $a \in X$, então $(a, a) \in R$. $Notação : a \sim a$.*

2) *Se $(a, b) \in R$, então $(b, a) \in R$. $Notação : a \sim b \to b \sim a$.*

3) *Se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$. $Notação : a \sim b$ e $b \sim c \to a \sim c$.*

Diz-se que uma relação é *reflexiva* se satisfaz 1, *simétrica* se satisfaz 2 e *transitiva* se satisfaz 3. Então, uma relação R será uma relação de equivalência se, e somente se, for reflexiva, simétrica e transitiva.

Uma relação de equivalência em X é o mesmo que uma partição $X = \sqcup_{\lambda \in I} X_\lambda$ de X, isto é, uma coleção de subconjuntos $X_\lambda \neq \varnothing$, dois a dois disjuntos, cuja união é X. De fato, dada a partição de X, podemos definir uma relação de equivalência $\sim$ declarando que $x \sim y$ se, e somente se, x e y pertencem a um mesmo X_λ. Reciprocamente, se $\sim$ é uma relação de equivalência, dado um elemento $x \in X$ podemos definir a classe de equivalência $[x]$ de x como o conjunto de todos os elementos equivalentes a x:

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

Outra notação para $[x]$ é $\bar{x}$.

Observe que ou $[x] \cap [y] = \varnothing$ (se $x \not\sim y$) ou $[x] = [y]$ (se $x \sim y$). Assim, as distintas classes de equivalência $[x]$ formam a partição de X. O conjunto $\{[x] \mid x \in X\}$ das classes de equivalência de $\sim$ é chamado de quociente de X por $\sim$ e é denotado por $\frac{X}{\sim}$. Intuitivamente, $\frac{X}{\sim}$ é o conjunto obtido "igualando-se" elementos equivalentes entre si.

Teorema 4.4. *Seja X um conjunto e $R \subset X \times X$ uma relação de equivalência sobre X então, $\frac{X}{R}$ é uma partição de X.*

4.2 Topologia quociente

Definição 4.6. *Seja $f : X \to Y$ função sobrejetora, X espaço topológico e Y conjunto. A topologia quociente em Y induzida por X e f é definida por*

$$\tau_f = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \subset X \text{ é aberto}\}$$

Observação 4.3. 1) *τ_f é uma topologia para Y;*

2) *Com a topologia τ_f de Y, $f : X \to Y$ é contínua.*

Teorema 4.5. *Seja X espaço topológico e $f : X \to Y$ função sobrejetora. Suponha que Y tenha topologia quociente induzida por X e f. Então*

$$g : Y \to Z \text{ é contínua } \iff g \circ f \text{ é contínua .}$$

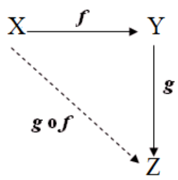

Figura 4.1: Função composta

Teorema 4.6. *Sejam X espaço topológico e $\sim_X$ relação de equivalência em X; seja Y espaço topológico e $\sim_Y$ relação de equivalência em Y;*

$$\begin{array}{lll} \pi_1 : X \to \frac{X}{\sim} & e & \pi_2 : Y \to \frac{Y}{\sim} \\ \pi_1(a) = [a]_X & & \pi_2(b) = [b]_Y. \end{array}$$

Considere $\frac{X}{\sim}$ com a topologia quociente induzida por X e π_1 e $\frac{Y}{\sim}$ com a topologia quociente induzida por Y e π_2. Seja $f : X \to Y$ uma função e suponha que:

$$a \sim_X b \iff f(a) \sim_Y f(b).$$

Se f é homeomorfismo, então

$$\overline{f} : \frac{X}{\sim} \to \frac{Y}{\sim}$$
$$[a]_X \longmapsto [f(a)]_Y,$$

é homeomorfismo.

4.3 Espaços compactos

Definição 4.7. *Uma coleção A de subconjuntos de um espaço X é dito cobertura de X se a união dos elementos de A é igual a X. Ela é chamada uma cobertura aberta de X se seus elementos são subconjuntos abertos de X.*

Definição 4.8. *Seja X espaço topológico. Dizemos que X é compacto se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita, ou seja, se τ_X é a topologia em X, então*

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i, \textit{com } A_i \in \tau_X \Longrightarrow \exists i_1, ..., i_m \in I \textit{ tal que } X = A_1 \cup ... \cup A_m.$$

Em outras palavras, se X é compacto e $X \subset \cup A_i$, onde os A_i são abertos, então é possível escolher um número finito de abertos, digamos $A_{i_1}, ..., A_{i_m}$, de forma a que $X \subset A_{i_1} \cup ... \cup A_{i_m}$.

Proposição 4.3. *Seja $Y \subset X$ subespaço topológico de X. Então Y é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta de Y por abertos de X $\left(Y \subset \bigcup_{i \in J} A_i \textit{ com } A_i \textit{ aberto em } X \right)$, possui uma subcobertura finita.*

Exemplo 4.2. *Seja A subespaço finito de um espaço topológico de X, digamos $A = \{a_1, ..., a_m\}$. Então A é necessariamente compacto. Com efeito, se $\mathscr{G} = \{U_i\}$ é cobertura aberta de A, então cada ponto de A pertence a um dos membros de $\mathscr{G}$, digamos $a_1 \in U_{i_1}$, ..., $a_m \in U_{i_m}$. Consequentemente, $A \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_m}$.*

Como um conjunto A é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta de A contém uma subcobertura finita, basta exibirmos uma cobertura de A que não contenha subcobertura finita, para provarmos que A não é compacto.

Exemplo 4.3. *A reta real $\mathbb{R}$ é não compacta, pois a cobertura de $\mathbb{R}$ por intervalos abertos*

$$\mathscr{A} = \{\langle n, n+2 \rangle \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

não contém subcoleção finita que cobre $\mathbb{R}$. Em geral, $X = \mathbb{R}^n$ não é compacto.

Na continuação vamos listar os teoremas mais importantes envolvendo conjuntos compactos.

Teorema 4.7. *Seja X espaço topológico compacto se $F \subset X$ é fechado, então F é compacto.*

Teorema 4.8. *Seja X espaço topológico Hausforff se $F \subset X$ é compacto então F é fechado.*

Teorema 4.9. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ função contínua. Se $K \subset X$ é compacto então $f(K)$ é compacto.*

Teorema 4.10. *Seja $f : X \to Y$ uma bijeção contínua. Se X é compacto e Hausdorff então f é um homeomorfismo.*

Teorema 4.11. *Produto finito de compactos é compacto.*

Teorema 4.12 (Tychonoff)**.** *Produto arbitrário de compactos é compacto.*

Teorema 4.13. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua com X compacto. Então existem $a, b \in \mathbb{R}$, para todo $x \in X$ tais que*

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b).$$

Toda função real contínua definida num conjunto compacto atinge seus valores máximos e mínimos na reta.

4.4 Espaços conexos

Definição 4.9. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é conexo se, sempre que $X = U_1 \cup U_2$ com U_1, U_2 abertos disjuntos, então $U_1 = \varnothing$ ou $U_2 = \varnothing$. Equivalentemente não existe $X = U_1 \cup U_2$ com U_1, U_2 abertos, não vazios sendo $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.*

Proposição 4.4. *Seja X espaço topológico. Temos que X é conexo se, e somente se, os únicos abertos e fechados de X são $\varnothing$ e X.*

Lema 4.1. *Seja X espaço topológico. Suponha $X = U_1 \cup U_2$ com U_1 e U_2 abertos disjuntos não-vazios. Seja $Y \subset X$ subespaço topológico conexo, então $Y \subset U_1$ ou $Y \subset U_2$.*

Teorema 4.14. *Seja X espaço topológico. Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ coleção de conjuntos conexos de X tal que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$ então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é conexo.*

Teorema 4.15. *Seja X espaço topológico e $A \subset X$ conexo. Se $A \subset B \subset \overline{A}$, então B é conexo. Em particular, se $A \subset X$ é conexo, então $\overline{A}$ é conexo.*

Teorema 4.16. *Seja $f : X \to Y$ função contínua entre espaço topológico X e Y se $C \subset X$ é conexo, então $f(C) \subset Y$ é conexo.*

Teorema 4.17 (Teorema do valor intermediário)**.** *Seja X espaço topológico e $f : X \to \mathbb{R}$ função contínua. Sejam $a, b \in X$ e seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leqslant c \leqslant f(b)$. Então existe $p \in X$ tal que $f(p) = c$.*

Definição 4.10. *Seja X espaço topológico.*

1) *Um caminho em X de x para y $(x, y \in X)$ é uma aplicação contínua $\alpha : I = [0, 1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$;*

2) *Dizemos que X é conexo por caminhos se para cada $x, y \in X$ existe um caminho de x para y.*

Proposição 4.5. *Seja X espaço topológico. Se X é conexo por caminhos, então X é conexo (o recíproco não vale).*

Exemplo 4.4. *Agora iremos dar um contra-exemplo da recíproca proposição acima. Considere $\phi : \langle 0,1] \to S$, $\phi(x) = \left(x, sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. Então $S = \left\{\left(x, sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid 0 < x \leq 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$ é conexo, pois $S = Im\ \phi$, ϕ é contínua e $Dom\ \phi = \langle 0,1]$ é conexo. Temos que $\overline{S}$ é conexo pelo teorema 4.15, por outro lado é possível mostrar que $\overline{S}$ não é conexo por caminhos. Veja que $\overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1,1])$.*

Exemplo 4.5. *A bola aberta de raio 1,*

$$\mathring{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \|x\| < 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

é conexa por caminhos.

Exemplo 4.6. *A bola fechada de raio 1,*

$$\overline{\mathbb{B}^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \|x\| \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

é conexa por caminhos.

Definição 4.11. *Uma variedade topológica (sem bordo) de dimensão n é um espaço topológico Hausdorff tal que cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa com um aberto de $\mathbb{R}^n$, para $n = 1$ temos uma curva (sem extremidades), para $n = 2$ uma superfície (sem bordo). É possível mostrar que toda variedade topológica compacta e conexa por caminhos é conexa.*

Exemplo 4.7. *Esfera de dimensão n ($n > 1$).*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

ou seja, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$. A esfera é conexa.

Lema 4.2. *Seja X espaço topológico. A relação $\sim$ em X dada por,*

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists U \subset X \text{ conexo tal que } x, y \in U,$$

é uma relação de equivalência.

Teorema 4.18. *Todo espaço topológico X é uma união disjunta de conexos não vazios, $X = \sqcup C_i$. As C_i são chamadas de componentes conexas de X. As componentes conexas de X são dadas pelas classes de equivalência do Lema 4.2.*

A seguinte proposição é um caso particular do Teorema Fundamental da Álgebra.

Proposição 4.6. *Todo polinômio com coeficientes reais $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ não constante de grau ímpar possui ao menos uma raiz real.*

Demonstração. Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, onde $a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Suponha que $a_n = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} P(x) &= \lim_{x \to +\infty} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \\ &= \lim_{x \to +\infty} x^n \cdot \left(\frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{x^n} \right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} x^n \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_0}{x^n} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Analogamente, $\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty$. Como, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P(x) = \pm\infty$, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $P(a) < 0$ e $P(b) > 0$. A função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = P(x)$ contínua com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, como $f(a) < 0 < f(b)$, existe $p \in [a, b]$ tal que $f(p) = 0$, assim $P(p) = 0$. □

4.5 Superfícies

Para o desenvolvimento desta seção utilizamos como principal referência [7].

Definição 4.12. *Uma superfície S (sem bordo) é um espaço topológico Hausdorff com a propriedade que cada ponto $x \in S$ possui uma vizinhança homeomorfa com*

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|x - p\| < \varepsilon\},$$

para algum $\varepsilon > 0$ e $p \in \mathbb{R}^2$.

Definição 4.13. *Uma superfície S com bordo é um espaço topológico Hausdorff com a propriedade que cada ponto $x \in S$ possui uma vizinhança homeomorfa com*

$$B(p, \varepsilon) \cap H, \text{ onde } H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y \geqslant 0\}.$$

Exemplo 4.8. *Toro, veja a Figura 4.2.*

$$\mathbb{T} = \frac{[0,1]^2}{\sim},$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência no quadrado $[0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$, dada pela identificação dos lados opostos do quadrado com a "mesma orientação".

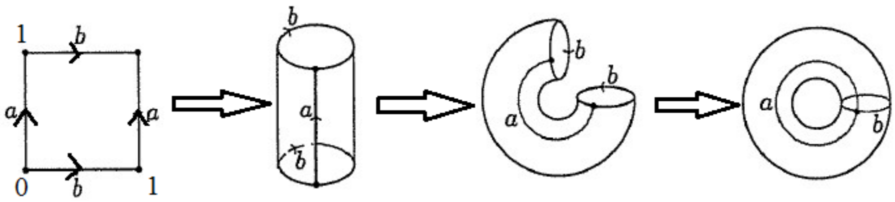

Figura 4.2: Toro, veja em [7].

Exemplo 4.9. *Cilindro, veja a Figura* 4.3.

$$S = \frac{[0,1]^2}{\sim},$$

onde $\sim$ *é a relação de equivalência no quadrado* $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$*, dada pela identificação de dois lados opostos do quadrado com a "mesma orientação".*

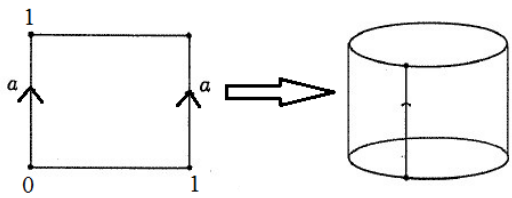

Figura 4.3: Cilindro, veja em [7].

Exemplo 4.10. *Faixa de Mobius, veja a Figura* 4.4.

$$\mathscr{M} = \frac{[0,1]^2}{\sim},$$

onde $\sim$ *é a relação de equivalência no quadrado* $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$*, dada pela identificação de dois lados opostos do quadrado com a "orientação oposta".*

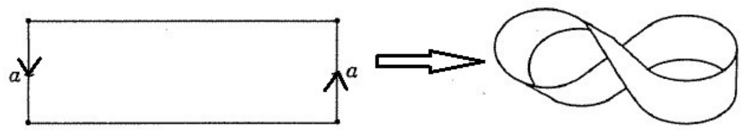

Figura 4.4: Faixa de Mobius, veja em [7].

Definição 4.14. *Uma superfície* (*com ou sem bordo*) *é não orientável se possui uma faixa de Mobius.*

Exemplo 4.11. *Espaço projetivo* $\mathbb{P}^2$ (*não orientável*)*, veja as Figuras* 4.5 *e* 4.6.

Observação 4.4. *Existem várias formas equivalentes de definir espaço projetivo, entre elas:*

1) *O espaço projetivo é o espaço de todas as retas passando pela origem em* $\mathbb{R}^2$*;*

2) *O espaço projetivo pode ser visto também como o espaço resultante da identificação de antipodas numa esfera em* $\mathbb{R}^3$.

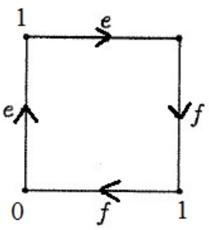

Figura 4.5: Espaço projetivo 1, veja [7].

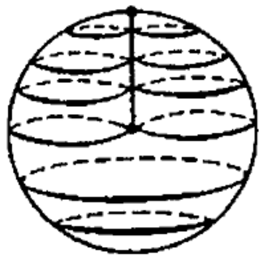

Figura 4.6: Espaço projetivo 2.

Exemplo 4.12. *Garrafa de Klein (não orientável), veja a Figura* 4.7.

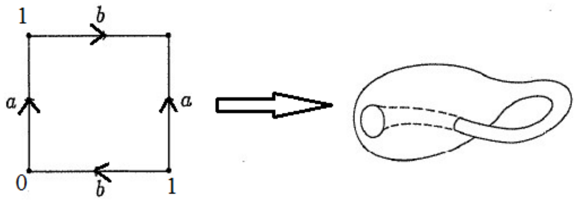

Figura 4.7: Garrafa de Klein, veja [7].

Definição 4.15. *Sejam S_1 e S_2 superfícies. A soma conexa $S_1\#S_2$ é o espaço topológico formado fazendo um pequeno buraco circular em cada superfície e colando as duas superfícies ao longo dos bordos dos buracos, veja a Figura* 4.8. *Formalmente, a soma conexa é definida da seguinte maneira:*

1) *Sejam $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$ discos fechados (homeomorfos com $\overline{B(p,\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|x-p\| \leqslant \varepsilon\}$ para algum $\varepsilon > 0$ e $p \in \mathbb{R}^2$).*

2) *Considere $S_1 \backslash \mathring{D}_1$ e $S_2 \backslash \mathring{D}_2$ (com $\mathring{D}_1$ e $\mathring{D}_2$ interiores de D_1 e D_2, respectivamente). Seja $f : \delta D_1 \to \delta D_2$ (com δD_1 e δD_2 bordos de D_1 e D_2, respectivamente) um homeomorfismo. Em $(S_1 \backslash \mathring{D}_1) \sqcup (S_2 \backslash \mathring{D}_2)$,*

$$x \sim y \Longleftrightarrow_{def} x = y \text{ ou } \begin{cases} x \neq y \text{ e} \\ x = f(y) \text{ ou } y = f(x) \end{cases}$$

é uma relação de equivalência. A soma conexa de S_1 e S_2 é definida por

$$S_1\#S_2 := \frac{(S_1 \backslash \mathring{D}_1) \sqcup (S_2 \backslash \mathring{D}_2)}{\sim}$$

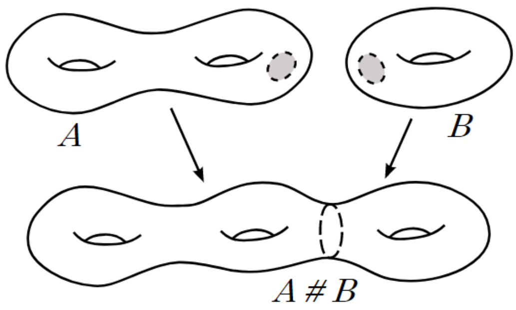

Figura 4.8: Soma conexa.

4.5.1 Teorema de classificação de superfícies

Teorema 4.19. *Seja S superfície (sem bordo) compacta e conexa então*

(1) $S \equiv S^2$ *a esfera, dizemos que o gênero de S é 0, ou*

(2) $S \equiv \mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\mathbb{T}\#...\#\mathbb{T}$ *soma conexa finita de n toros, dizemos que o gênero de S é n, ou*

(3) $S \equiv \mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2\#...\#\mathbb{P}^2$ *soma conexa finita de m espaços projetivos, dizemos que o gênero de S é m.*

Sendo (1) e (2) superfícies orientáveis e (3) superfícies não-orientáveis.

Proposição 4.7. *Existe um mergulho de $\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{R}^4$: $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, ou seja, existe um homeomorfismo $\varphi : \mathbb{P}^2 \to Im(\varphi) \subset \mathbb{R}^4$. Em particular, toda superfície (sem bordo) não orientável mergulha em $\mathbb{R}^4$.*

Observação 4.5. *Pode ser mostrado que superfícies (sem bordo) não orientáveis não podem mergulhar em $\mathbb{R}^3$.*

4.6 Característica de Euler

Um invariante topológico é uma propriedade topológica que é preservada por homeomorfismos. Alguns invariantes topológicos estudados até agora são a compacidade, a conexidade e a conexidade por caminhos. Outro invariante topológico importante é a Característica de Euler. Para o desenvolvimento desta seção e para mais detalhes veja o livro [7].

Dado um complexo simplicial S, a Característica de Euler de S é um número inteiro que é denotado por $\chi(S)$. Duas das principais propriedades da Característica de Euler são

a) A Característica de Euler de um espaço topológico S não depende da estrutura de complexo simplicial de S.

b) Se S_1, S_2 são dois complexos simpliciais que são homeomorfos, então S_1 e S_2 tem a mesma Caraterística de Euler.

Quando S é uma superfície compacta é mais simples definir a Caraterística de Euler, neste caso uma estrutura de complexo simplicial de S é uma triangulação de S (veja definição de triangulação e mais detalhes em [7]). É bem conhecido que toda superfície compacta admite uma triangulação (este resultado foi provado pelo matemático húngaro Tibor Radó em 1925), assim é possível definir sua Característica de Euler.

Uma triangulação de uma superfície é uma decomposição dela em um número finito de partes triangulares satisfazendo a condição adicional que dois triângulos são identificados ao longo de uma mesma aresta ou em um único vértice ou são disjuntos. Uma triangulação tem as seguintes propriedades:

1. Qualquer aresta é aresta exatamente de dois triângulos;

2. Dados dois triângulos, existe uma sequência de triângulos começando em um deles e terminando no outro, de modo que dois termos consecutivos dessa sequência tem uma aresta em comum.

Definição 4.16. *A Característica de Euler para uma superfície S é dada por*

$$\chi(S) = V - A + F,$$

onde V, A e F são respectivamente o número de vértices, arestas e faces de uma triangulação de S.

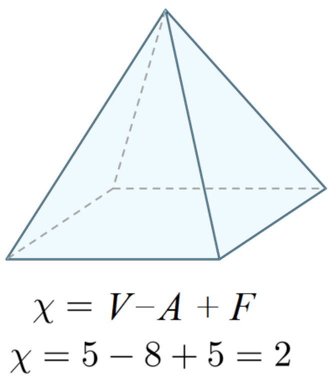

Figura 4.9

Temos o seguinte teorema

Teorema 4.20. *Seja S_1, S_2 superfícies compactas, conexas e sem bordo. Então S_1 é topologicamente equivalente a S_2 se, e somente se, $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ e também ambas são orientáveis ou ambas são não-orientáveis.*

Para finalizar vale a pena mencionar duas fórmulas importantes para calcular a Característica de Euler em superfícies:

1. Dadas duas superfícies S_1 e S_2, vale que

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

2. Seja S uma superfície compacta e conexa de gênero g, então,

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g, & \textit{se } S \textit{ é orientável} \\ 2 - g, & \textit{se } S \textit{ não é orientável.} \end{cases}$$

Capítulo 5

O Grupo Fundamental

Neste capítulo, vamos estudar outro invariante topológico importante, o chamado Primeiro Grupo de Homotopia ou Grupo Fundamental. Como uma aplicação, vamos dar uma demonstração topológica do Teorema Fundamental da Álgebra. Para o desenvolvimento do capítulo utilizamos as referências [9] e [12].

Vamos lembrar a definição de Grupo e Homomorfismo:

Definição 5.1. *Seja G um conjunto não vazio munido de uma operação $*$. Dizemos que G é um grupo com respeito à operação $*$ se satisfazem as seguintes propriedades:*

1) *Para todo $a, b \in G$, tem-se $a * b \in G$;*

2) *Para todo $a, b, c \in G$, tem-se $a * (b * c) = (a * b) * c$;*

3) *Existe $e \in G$, chamado de elemento neutro de G tal que para todo $a \in G$, tem-se $e * a = a$;*

4) *Para todo $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$, chamado de elemento inverso de G tal que $a^{-1} * a = e$.*

Definição 5.2. *Sejam $(G, *)$ e $(H, \otimes)$ grupos (ver Definição 5.1). Uma aplicação $\phi : (G, *) \to (H, \otimes)$ é um homomorfismo se, e somente se, para todo $a, b \in G$,*

$$f(a * b) = f(a) \otimes f(b).$$

5.1 Homotopias

Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$, $f' : X \to Y$ funções contínuas.

Definição 5.3 (Homotopia de função)**.** *Seja $I = [0, 1]$ um intervalo. Dizemos que f é homotópico a f' ($f \simeq f'$) se existir uma função contínua $F : X \times I \to Y$, tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = f'(x)$.*
Notação: $F(x, t) = f_t(x)$. Assim $f_0 = f$ e $f_1 = f'$.

Definição 5.4 (Homotopia de caminho)**.** *Seja $I = [0, 1]$ um intervalo. Sejam $\alpha : I \to X$ e $\beta : I \to X$ funções contínuas (curvas ou caminhos) tais que $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e*

$\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. *Dizemos que* α *e* β *são caminhos homotópicos (veja a Figura* 5.1*),* $\alpha \;{}_{\mathscr{C}}\!\simeq \beta$*, se existir uma função contínua* $F : I \times I \to X$ *tal que*

$$F(s,0) = \alpha(s) \text{ e } F(s,1) = \beta(s) \;\forall s \in I$$
$$F(0,t) = x_0 \text{ e } F(1,t) = x_1 \;\forall t \in I$$

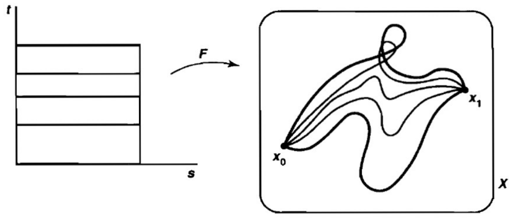

Figura 5.1: Caminho homotópico, veja em [12].

Lema 5.1. 1) *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos. Então* $\simeq$ *é uma relação de equivalência em*

$$C(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ é contínua}\}.$$

2) *Seja* X *espaço topológico com* $x_0, x_1 \in X$*. Então* ${}_{\mathscr{C}}\!\simeq$ *é uma relação de equivalência em*

$$C(I,X,x_0,x_1) = \{\alpha : I \to X \mid \alpha \text{ é contínua com } \alpha(0) = x_0 \text{ e } \alpha(1) = x_1\}.$$

Definição 5.5. *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos. Dado* $y_0 \in Y$*, considere a função constante* $e_{y_0} : X \to Y$ *definida por* $e_{y_0}(x) = y_0$*, para todo* $x \in X$*. Dizemos que uma função contínua* $f : X \to Y$ *é homotopicamente nula se* $f \simeq e_{y_0}$*. É possível provar que a definição é independente de* $y_0 \in Y$ *quando* Y *é conexo por caminhos.*

Exemplo 5.1. *Seja* X *espaço topológico e* $f, g : X \to \mathbb{R}^2$ *contínuas, então* $f \simeq g$*. A homotopia entre* f *e* g *é dada por* $F : X \times I \to \mathbb{R}^2$ *(veja a Figura* 5.2*),*

$$F(x,t) = f(x) + t(g(x) - f(x)) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Vemos que para todo $x \in X$

$$F(x,0) = f(x),$$

$$F(x,1) = g(x).$$

Exemplo 5.2. *Um subconjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *é chamado convexo se para cada* $x, y \in A$*, o segmento ligando* x *com* y *está contido em* A*, ou seja,*

$$[x,y] := \{x + t(y-x) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset A.$$

Assim, se A *é conexo, segue do exemplo anterior que quaisquer duas funções contínuas* $f, g : X \to A$ *são homotópicas.*

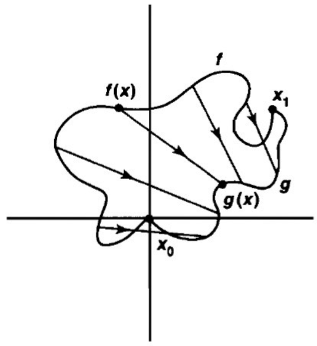

Figura 5.2: Homotopia entre f e g, veja em [12].

Dado $x \in X$, o caminho constante $e_x : I \to X$ é definido por $e_x(t) = x$, para todo $t \in I = [0,1]$.

Seja $\alpha : I \to X$ um caminho de x_0 para x_1. O caminho $\bar{\alpha} : I \to X$ definido por $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ é chamado caminho inverso de α (ele inverte a orientação de α, vai de x_1 para x_0).

Definição 5.6. *Seja X espaço topológico. Seja α caminho de x_0 para x_1 e β caminho de x_1 para x_2. Definimos produto $\alpha * \beta$, pelo um caminho de x_0 para x_2 (veja a Figura 5.3) dado por*

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

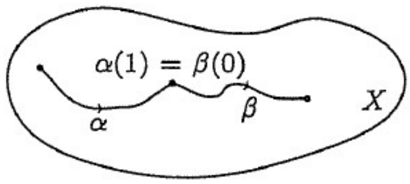

Figura 5.3: Caminho de x_0 para x_2, veja [7].

Com mais precisão, $*$ é o operador:

$$\begin{aligned} * : C(I, X, x_0, x_1) \times C(I, X, x_1, x_2) &\to C(I, X, x_0, x_2) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha * \beta \end{aligned}$$

Pode ser mostrado que $*$ estende para ($\mathscr{C} \backsimeq$)

$$* : \frac{C(I, X, x_0, x_1)}{\sim} \times \frac{C(I, X, x_1, x_2)}{\sim} \to \frac{C(I, X, x_0, x_2)}{\sim}$$

$$([\alpha], [\beta]) \longmapsto [\alpha * \beta]$$

Teorema 5.1. *A operação $*$ tem as seguintes propriedades:*

1) $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$;

2) *Seja α um caminho de x_0 para x_1, então*

$$[\alpha] * [e_{x_1}] = [\alpha]$$
$$[e_{x_0}] * [\alpha] = [\alpha];$$

3) *Seja α um caminho de x_0 para x_1, então*

$$[\alpha] * [\bar{\alpha}] = [e_{x_0}]$$
$$[\bar{\alpha}] * [\alpha] = [e_{x_1}].$$

Definição 5.7. *Seja X espaço topológico e $x_0 \in X$. Um laço em X com base em x_0 é um caminho $\alpha : I \to X$ contínuo tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.*

Figura 5.4: Laço com base em x_0.

Corolário 5.1. *O conjunto de classes de laços de base x_0, com a operação $*$, é chamado o grupo fundamental de X relativo ao ponto base x_0 ou primeiro grupo de homotopia de X, denotado por,*

$$\pi_1(X, x_0).$$

Mais precisamente, sendo $C(I, X, x_0) = \{\alpha : I \to X$ laços com base em $x_0\}$, segue que

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{C(I, X, x_0)}{\sim}.$$

Observe que,

$$\begin{cases} [\alpha]^{-1} & = & [\bar{\alpha}] \\ 0 & = & [e_{x_0}]. \end{cases}$$

Observe também que $[e_{x_0}]$ é a classe de todos os laços com base x_0 que são homotópicos com e_{x_0}:

$$[e_{x_0}] = \{\alpha : I \to X \text{ laço com } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \mid \alpha \ {}_{\mathscr{C}}\!\simeq e_{x_0}\}.$$

Assim, se $\alpha \ {}_{\mathscr{C}}\!\simeq e_{x_0}$ então α pode ser "deformado continuamente em X para o ponto x_0".

Exemplo 5.3. *Para $X = \mathbb{R}^n$ então $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{0\}$ para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Mais geralmente, se X é um conjunto conexo então $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ para qualquer $x_0 \in X$.*

Definição 5.8. *Seja X espaço topológico, α um laço com base em x_0 e $\gamma : I \to X$ um caminho de x_0 para x_1 (com x_0, $x_1 \in X$), veja a Figura 5.5. Definimos a aplicação*

$$\widetilde{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$
$$\widetilde{\gamma}([\alpha]) = [\overline{\gamma} * \alpha * \gamma].$$

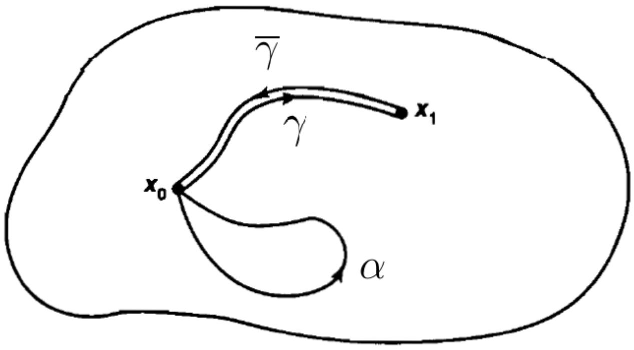

Figura 5.5: Caminho de x_0 para x_1.

Teorema 5.2. *A aplicação* $\widetilde{\gamma}$ *é um isomorfismo de grupos (homomorfismo que possui inversa).*

Corolário 5.2. *Se* X *é conexo por caminhos e* $x_0, x_1 \in X$*, então*

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_1).$$

Observação 5.1. *Segue do Corolário* 5.2 *que, se* X *é conexo por caminhos o grupo fundamental não depende do ponto base. Assim, neste caso, escrevemos apenas*

$$\pi_1(X).$$

Observação 5.2. *Seja* X *espaço topológico e* $x_0 \in X$*. O grupo fundamental de* X *depende apenas da componente conexa por caminhos que contém* x_0*. Se* $C_i \subset X$ *é a componente conexa por caminhos que contém* x_0*, então*

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(C_i, x_0).$$

Definição 5.9. *Seja* X *espaço topológico. Dizemos que* X *é simplesmente conexo se ele é conexo por caminhos e tem grupo fundamental trivial:*

$$\pi_1(X) = \{0\}.$$

Em outras palavras, um espaço topológico é simplesmente conexo se, e somente se, toda trajetória fechada em X *é contrátil a um ponto.*

Exemplo 5.4. *Um disco (Figura* 5.6*) no plano* $\mathbb{R}^2$ *é simplesmente conexo, enquanto a coroa circular (Figura* 5.7*) não o é, pois existem nela curvas fechadas que não se reduzem a um ponto.*

Lema 5.2. *Seja* X *espaço topológico simplesmente conexo e* $x_0, x_1 \in X$*. Então qualquer dois caminhos em* X *de* x_0 *para* x_1 *são homotópicos.*

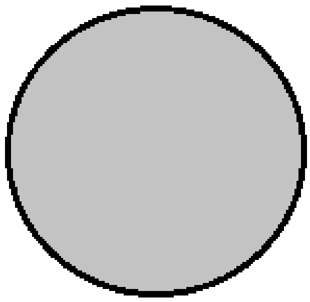

Figura 5.6: Simplesmente conexo.

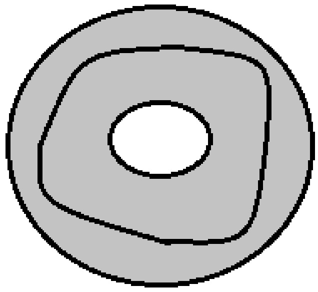

Figura 5.7: Não simplesmente conexo.

Definição 5.10. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ função contínua tal que $f(x_0) = y_0$. Definimos*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

A aplicação f_* é chamado homomorfismo de grupos induzido por f (ou push forward), em relação ao ponto base x_0.

Teorema 5.3. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos.*

1) *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções contínuas (aqui $f(x_0) = y_0$ e $g(y_0) = z_0$). Então*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

2) *Se $i : X \to X$ é a identidade ($i(x) = x$, para todo $x \in X$). Então*

$$i_* = 1 : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

é o homomorfismo identidade.

Corolário 5.3. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ função contínua, então. Se f é homeomorfismo, então $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo (veja Definição 4.4). Em particular, para espaços topológicos conexos por caminhos, X, Y,*

$$X \equiv Y \Longrightarrow \pi_1(X) \equiv \pi_1(Y).$$

Teorema 5.4. *Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|z\| = 1\}$ a circunferência. Então*

$$\pi_1(S^1) \equiv \mathbb{Z}.$$

Observação 5.3. *Sejam $n \in \mathbb{Z}$, $e_1 = (1, 0) \in S^1$ e $\alpha_n : I = [0, 1] \to S^1$ o laço definido por $\alpha_n(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$. Então o isomorfismo no Teorema 5.4 tem a seguinte propriedade*

$$\pi_1(S^1, e_1) \to \mathbb{Z}$$
$$[\alpha_n] \longmapsto n$$

A grosso modo, o isomorfismo faz corresponder a cada laço com base em e_1 um número inteiro; seu "número de voltas" em torno de S^1.

5.2 Aplicações

Nesta seção vamos ver algumas aplicações do teorema 5.4.

Definição 5.11. *Seja X espaço topológico e $A \subset X$. Uma retração de X sobre A é uma aplicação contínua $r : X \to A$ tal que $r|_A = 1_A : A \to A$ é a identidade. Se r existe, dizemos que A é retrato de X.*

Exemplo 5.5. *S^1 é um retrato de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Isso é simples de ver, basta considerar a retração $r : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to S^1$, definida por*

$$r(z) = \frac{z}{\|z\|}.$$

Lema 5.3. *Seja $r : X \to A$ uma retração e $j : A \to X$ a inclusão ($j(x) = x$, para todo $x \in A$). Então,*

$$j_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0),$$

é injetora.

Demonstração. Se $r : X \to A$ é uma retração, então a função composição $r \circ j$ é a função identidade de A, isto é,

$$r \circ j = 1_A$$

$$r_* \circ j_* = (1_A)_*$$

$$r_* \circ j_* = 1.$$

Assim, $r_* \circ j_*$ é a função identidade de $\pi_1(A, x_0)$. Como $r_* \circ j_* = 1$ é injetora, segue que j_* é injetora também. □

Teorema 5.5 (Teorema de não retração). *Não existe retração de $B^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leqslant 1\}$ para $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = 1\}$.*

Demonstração. Se S^1 é uma retração de B^2, isto é, existe $r : B^2 \to S^1$, então o homomorfismo induzido pela inclusão $j : S^1 \to B^2$ (pela Definição 5.10) é

$$j_* : \pi_1(S^1, p) \to \pi_1(B^2, p),$$

que deveria ser injetivo (pelo Lema 5.3). Agora, segue do Teorema 5.4 que o grupo fundamental de S^1 é $\mathbb{Z}$ e o grupo fundamental de B^2 é trivial, pois B^2 é simplesmente conexo. Assim j_* é o homomorfismo nulo o que é uma contradição. □

Lema 5.4. *Seja $f : S^1 \to X$ função contínua. São equivalentes:*

1) *f é homotopicamente nula ($f \simeq e_{x_0}$, para algum $x_0 \in X$);*

2) *f estende continuamente para $F : B^2 \to X$ ($F(x) = f(x)$, para todo $x \in S^1$);*

3) *f_* é o homomorfismo trivial (função nula).*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Seja $H : S^1 \times I \to X$ uma homotopia entre f e a aplicação constante $e_{x_0} : S^1 \to X$, $e_{x_0}(p) = x_0$

$$\begin{cases} H(x,0) &= & f \\ H(x,1) &= & e_{x_0}. \end{cases}$$

Considere a aplicação $\pi : S^1 \times I \to B^2$ definida por

$$\pi(x,t) = (1-t)x.$$

Em geral, se $\pi : X \to Y$ é contínua, fechada e sobrejetora, então π é uma aplicação quociente (para mais detalhes veja [12]): existe relação de equivalência em X tal que

$$\pi : X \to Y = \frac{X}{\sim}$$

$$x \mapsto [x].$$

A aplicação quociente identifica os pontos de $S^1 \times \{1\}$ com o ponto 0 e é injetora para os outros pontos. Agora definiremos uma função k tal que

$$H = k \circ \pi.$$

Observe que B^2 tem a topologia quociente induzida por π. Assim, pelo teorema 4.5, k é contínua, veja a Figura 5.8.

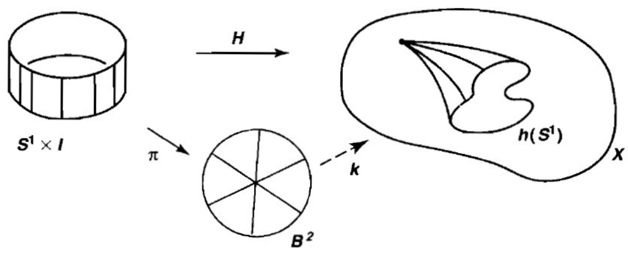

Figura 5.8: Veja em [12].

(2) $\Rightarrow$ (3). Considere $j : S^1 \to B^2$ uma inclusão e $F : B^2 \to X$. Então f é igual a composição $F \circ j$. Consequentemente $f_* = F_* \circ j_*$. Mas

$$j_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(B^2, x_0),$$

é trivial porque o grupo fundamental de B^2 é trivial. Portanto, f_* é trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1). Dado $\alpha_1 : I \to S^1$ com $\alpha_1 = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Por hipótese como f_* é o homomorfismo trivial, então

$$f_*(\alpha_1) = 0 = e_{x_0}$$

$$[f \circ \alpha_1] = [e_{x_0}]$$

$$f \circ \alpha_1 \simeq e_{x_0}.$$

Seja F a homotopia entre $f \circ \alpha_1$ e e_{x_0}. Defina G de tal modo que

$$G = \alpha_1 \times 1 : I \times I \to S^1 \times I$$
$$(t, s) \mapsto (\alpha_1, s).$$

Temos que G é contínua, fechada e sobrejetora, assim G é uma aplicação quociente; de fato esta aplicação quociente identifica os lados $0 \times I$ e $1 \times I$ de $I \times I$. Por último, definiremos $H : S^1 \times I \to X$ tal que $F = H \circ G$. Assim, pelo teorema 4.5, H é contínua, veja a Figura 5.9. Portanto, $H : f \simeq e_{x_0}$:
- $H(p, 0) = H(\alpha_1(t_0), 0) = H(G(t_0, 0)) = F(t_0, 0) = (f \circ \alpha_1)(t) = f(\alpha_1(t_0)) = f(p)$,
- $H(p, 1) = H(\alpha_1(t_0), 1) = H(G(t_0, 1)) = F(t_0, 1) = x_0$.

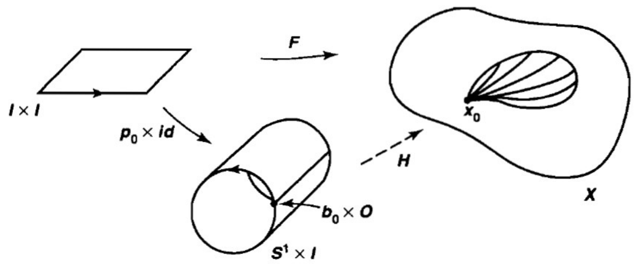

Figura 5.9: Veja em [12].

□

5.3 Teorema Fundamental da Álgebra

Agora vamos enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema muito importante e simples de compreender para um aluno de ensino fundamental mas a demonstração requer provas mais sofisticadas como uma prova topológica que será exposta neste trabalho. O Teorema Fundamental da Álgebra diz que todo polinômio não constante possui pelo menos uma raiz complexa. Uma consequência imediata é que todo polinômio não constante pode ser decomposto como produto de fatores lineares.

Entre outras provas deste teorema, Teoria de extensões de corpos e Análise Complexa onde o Teorema Fundamental da Álgebra é um Corolário do Teorema de Liouville, veja o Apêndice. Vale a pena mencionar que não existe uma prova simples deste teorema e que toda prova conhecida até agora usa topologia.

Teorema 5.6 (TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA)**.** *Todo polinômio não constante $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ possui pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$. Em particular, todo polinômio com coeficientes reais não constante possui pelo menos uma raiz complexa.*

Demonstração. Seja $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, n \in \mathbb{Z}^+$. Vamos demonstrar que a equação $p(z) = 0$ possui pelo menos uma solução em $\mathbb{C}$. Para isso, vamos dividi-la em quatro passos.

Passo 1. Seja $f : S^1 \to S^1$ com $f(z) = z^n$. Então f_* é injetivo.
Demonstração Passo 1:

Seja $e_1 = (1, 0) \in S^1$. A função f induz o homomorfismo de grupos f_* dado pela Definição 5.10,

$$f_* : \pi_1(S^1, e_1) \to \pi_1(S^1, e_1)$$

$$f_*([\alpha_1]) = [f \circ \alpha_1].$$

Agora, como $f(z) = z^n$ e $\alpha_m(t) = (\cos(2\pi mt), \sin(2\pi mt)) = e^{(2\pi mt)i}$, $m \in \mathbb{Z}$, segue que

$$f_*([\alpha_1(t)]) = [f \circ \alpha_1] = [f(\alpha_1)] = [\alpha_1(t)^n] = [(e^{(2\pi t)i})^n] = [e^{(2\pi nt)i}] = [\alpha_n(t)].$$

Por fim, pelo Teorema 5.4 o homomorfismo f_* pode ser visto como $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $1 \mapsto n$, que é injetivo.

Passo 2. Seja $g : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ com $g(z) = z^n$. Então g não é homotopicamente nula.
Demonstração Passo 2:

Considere a inclusão $j : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ($j(z) = z, \forall z \in S^1$). Como $g = j \circ f$, temos que $g_* = j_* \circ f_*$ (Teorema 5.3, item *1*). Dado que j_* é injetivo (Exemplo 5.5 e Lema 5.3) e f_* é injetivo (Passo 1), temos g_* injetivo. Logo não pode ser homomorfismo trivial. Portanto segue do Lema 5.4 segue que g não pode ser homotopicamente nula.

Passo 3 (Caso particular). Suponha que $\|a_{n-1}\| + \cdots + \|a_1\| + \|a_0\| < 1$. Então a equação $p(z) = 0$ possui pelo menos uma raiz em $B^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leqslant 1\}$.
Demonstração Passo 3.

Suponha que a equação $p(z) = 0$ não possua raiz em B^2.

Defina $k : B^2 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ com $k(z) = p(z)$ (observe que $k(z) \neq 0$ para todo $z \in B^2$, pois estamos supondo que $p(z)$ não possui raízes) e considere $h = k|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Então, pelo Lema 5.4, h é homotopicamente nula.

Agora vamos definir uma homotopia F entre g e h. Seja $F : S^1 \times I \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ dada por

$$F(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0).$$

Vejamos que F está bem definido, ou seja, $F(z, t) \neq 0$, para todo $(z, t) \in S^1 \times I$. Temos:

$$
\begin{aligned}
\|F(z,t)\| &\geq \|z^n\| - \|t(a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0)\| \\
&= \|z^n\| - t\|(a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0)\| \\
&\geq \|z^n\| - t\big(\|a_{n-1}z^{n-1}\| + ... + \|a_1 z\| + \|a_0\|\big), Pela\ Desigualdade\ Triangular \\
&= \|z\|^n - t\big(\|a_{n-1}\|\|z\|^{n-1} + ... + \|a_1\|\|z\| + \|a_0\|\big) \\
&= 1 - t\big(\|a_{n-1}\| + ... + \|a_1\| + \|a_0\|\big),\ pois\ \|z\| = 1,\ para\ todo\ z \in S^1 \\
&> 0,\quad Pela\ hipótese\ no\ Passo\ 3.
\end{aligned}
$$

Finalmente note que F é uma homotopia entre g e h pois:
- $F(z,0) = z^n = g(z)\ \forall z \in S^1$,
- $F(z,1) = p(z) = h(z)\ \forall z \in S^1$.

Como h é homotopicamente nula e g é homotópica a h, segue que g é homotopicamente nula. Assim, há uma contradição, pois g não é homotopicamente nula (Passo 2). Portanto, $p(z)$ possui pelo menos uma raiz em B^2.

Passo 4. Neste passo, por meio do passo 3, vamos demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra. Seja $c > 0$ um número real e considere a equação

$$
z^n + \frac{a_{n-1}}{c} z^{n-1} + ... + \frac{a_1}{c^{n-1}} z + \frac{a_0}{c^n} = 0 \tag{5.1}
$$

Agora vamos escolher c grande o suficiente tal que

$$
\left\| \frac{a_{n-1}}{c} \right\| + ... + \left\| \frac{a_1}{c^{n-1}} \right\| + \left\| \frac{a_0}{c^n} \right\| = \frac{\|a_{n-1}\|}{c} + ... + \frac{\|a_1\|}{c^{n-1}} + \frac{\|a_0\|}{c^n} < 1.
$$

Então, pelo Passo 3, a equação 5.1 possui uma raiz em B^2. Seja então $z_0 \in B^2$ tal que

$$
z_0^n + \frac{a_{n-1}}{c} z_0^{n-1} + ... + \frac{a_1}{c^{n-1}} z_0 + \frac{a_0}{c^n} = 0
$$

Multiplicando por c^n obtemos

$$
(cz_0)^n + a_{n-1}(cz_0)^{n-1} + ... + a_1(cz_0) + a_0 = 0
$$

Assim, $z = cz_0$ é uma raiz da equação original $p(z) = 0$. □

Corolário 5.4. *Todo polinômio não constante* $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ *pode ser decomposto como um produto de fatores lineares* $a_k z + b_x$. *Em particular, temos que todo polinômio não constante de grau* n, *possui* n *raízes (contadas com multiplicidade).*

Demonstração. Suponha $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$. Por indução no grau n:

1º) Para n=1 temos $z + a_0 = 0$ e, portanto, a raíz será $z = -a_0$.

2º) Suponha que o corolário vale para algum $n \in \mathbb{N}$.

3º) Seja $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ de grau $n+1$ não constante. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe $z_0 \in \mathbb{C}[z]$ tal que $p(z) = (z - z_0) \cdot q(z)$. Como grau de $q(z) = n$, pela hipótese de indução $q(z)$ possui n raízes contadas com multiplicidade. Portanto, $p(z)$ possui $n+1$ raízes contadas com multiplicidade. □

Observação 5.4. *Em particular, se $p(z)$ tem grau n, então $p(z) = c \cdot (z - z_0)^{r_0} \cdot ... \cdot (z - z_n)^{r_n}$ com $r_0 + ... + r_n = n$.*

O seguinte lema será importante para o próximo corolário.

Lema 5.5. *Seja $P(x) \in \mathbb{R}[x]$.*

$$P(z_0) = 0 \Longleftrightarrow P(\bar{z_0}) = 0.$$

Corolário 5.5. *Todo polinômio com coeficientes reais pode ser decomposto como um produto de polinômio reais lineares (de grau de 1) e quadráticos (de grau 2) com discriminante negativo.*

Demonstração. Seja $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinômio real não constante. Em particular, pelo Corolário 5.4

$$P(x) = c \cdot (x - a_1) \cdot ... \cdot (x - a_n) \cdot (x - b_1) \cdot ... \cdot (x - b_n),$$

com $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $b_1, ..., b_n \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ (pois P é polinômio real). Seja $Q(x) = (x - b_1) \cdot ... \cdot (x - b_m)$, com $m = 2k$ (par) pelo Lema 5.5. Então

$$Q(x) = (x - d_0) \cdot (x - \bar{d_0}) \cdot ... \cdot (x - d_k) \cdot (x - \bar{d_k}), \tag{5.2}$$

sendo $\{b_n, ..., b_m\} = \{d_0, \bar{d_0}, ..., d_k, \bar{d_k}\}$. Podemos reescrever a equação 5.2 da seguinte maneira:

$$(x^2 - (d_0 + \bar{d_0})x + \|d_0\|^2) \cdot ... \cdot (x^2 - (d_k + \bar{d_k})x + \|d_k\|^2) = Q_0(x) \cdot ... \cdot Q_k(x),$$

onde $Q_i(x) = x^2 - (d_i + \bar{d_i})x + \|d_i\|^2 \in \mathbb{R}[x]$ é quadrático com discriminante negativo. □

Capítulo 6

Apêndice

Nesse apêndice vamos demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra utilizando o Teorema de Liouville, veja [4] para mais detalhes.

Definição 6.1. *Denote* $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \longleftrightarrow z = (x, y)$

1) *Uma função* $f : U \to \mathbb{C}$ *defina num aberto* $U \subset \mathbb{C}$ *é holomorfa se existe derivada complexa*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

para todo $z \in U$.

2) *Uma função inteira é, por definição, uma função holomorfa definida em todo* $\mathbb{C}$, *ou seja,* $U = \mathbb{C}$.

Exemplo 6.1. *Todo polinômio* $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ *define uma função inteira* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = p(z)$. *De fato, se* $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$, *então* $f'(z) = n a_n z^{n+1} + ... + a_1$.

Teorema 6.1 (Teorema de Liouville)**.** *Se* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é uma função inteira e limitada, então* f *é constante. Aqui,* f *limitada significa que existe* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\|f(z)\| < \lambda$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$.

Corolário 6.1. *Todo polinômio não constante* $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ *possui pelo menos uma raiz em* $\mathbb{C}$.

Demonstração. A função

$$f(z) = p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 \ (a_n \neq 0, n > 0),$$

é inteira. Suponha $f(z)$ não possui nenhuma raiz em $\mathbb{C}$. Vamos mostrar que $f(z)$ é limitada, assim pelo teorema de Liouville, f é constante que implica que $p(z)$ é constante, o que é uma contradição.

Vejamos que f é limitada:

Passo 1:
A função $\dfrac{1}{f(z)}$ é bem definida e holomorfa, de fato:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f(z)}\right) = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}.$$

Passo 2:
Como

$$\lim_{\|z\|\to+\infty}\frac{1}{\|f(z)\|}=\lim_{\|z\|\to+\infty}\frac{\frac{1}{\|z\|^n}}{\frac{\|f(z)\|}{\|z\|^n}}=\lim_{\|z\|\to+\infty}\frac{\frac{1}{\|z\|^n}}{\left\|\frac{f(z)}{z^n}\right\|}=\frac{\frac{1}{+\infty}}{\|a_n\|}=0,$$

segue que $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$ tal que $\|z\|>R$, implica $\dfrac{1}{\|f(z)\|}<\varepsilon$. Então $\|f(z)\|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ para todo $\|z\|>R$, veja a Figura 6.1.

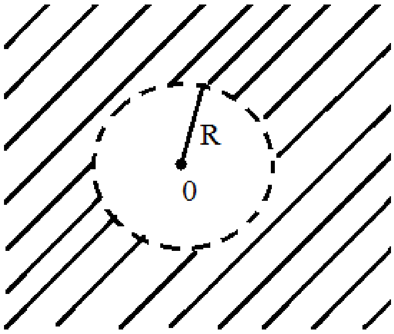

Figura 6.1

Passo 3:
Por outro lado, como $\overline{B}(0,R)$ é compacta, $\|f(z)\|$ é contínua e $\|f(z)\|\neq 0$, para todo $z\in\overline{B}(0,R)$. Assim, existe $\delta>0$ tal que

$$\|f(z)\|\geq\delta,\ \textit{para todo}\ z\in\overline{B}(0,R).$$

Passo 4:
Dos Passos 2 e 3 temos: $\|f(z)\|>\dfrac{1}{\varepsilon}$, para todo $\|z\|>R$ e $\|f(z)\|>\dfrac{\delta}{2}$ para todo $\|z\|\leq R$, assim

$$\|f(z)\|>k=min\left\{\frac{\delta}{2},\frac{1}{\varepsilon}\right\},\forall z\in\mathbb{C}.$$

Como $\|f(z)\|>k$ para todo $z\in\mathbb{C}$, em particular $\left\|\dfrac{1}{f(z)}\right\|<\dfrac{1}{k}$ para todo $z\in\mathbb{C}$, assim pelo Teorema de Liouville, $\dfrac{1}{f(z)}$ é constante, o que implica que f é constante. □

Capítulo 7

Considerações Finais

De modo geral, apresentamos neste trabalho o estudo de conceitos relacionados a Topologia e introdução de Topologia Algébrica (homotopias). Buscamos, através das pesquisas nas referências, reunir materiais relacionados a Topologia que abordassem de maneira clara e precisa. Após o estudo detalhado dos conceitos relacionados a topologia geral, partimos para as aplicações sendo a de maior destaque o Teorema fundamental da Álgebra. Este Teorema possui vários tipos de demonstrações, focamos especialmente na demonstração topológica.

Em suma, os conhecimentos tratados durante o trabalho são importantes não somente para o entendimento do Teorema Fundamental da Álgebra, mas também porque principiam o estudo da topologia geral permitindo assim, uma base para estudos futuros nesta área.

Referências Bibliográficas

[1] *Grigori Perelman, o gênio que resolveu um dos maiores problemas matemáticos do milênio e âsumiu do mapaâ.* Press From, https://pressfrom.info/br/noticias/ciencia-tecnologia/-17833-grigori-perelman-o-genio-que-resolveu-um-dos-maiores-problemas-matematicos-do-milenio-e-sumiu-do-mapa.html, 15 dez 2019.

[2] *Henri Poincaré*. Só Matemática, https://www.somatematica.com.br/biograf/poincare.php, 15 dez 2019.

[3] Boyer, C. B. *História da Matemática.* Editora Edgard Blusher, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

[4] Brown, J. W. *Complex Variables and Aplications*, 8ª ed. McGraw-Hill, New York, 2009.

[5] Carmo, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[6] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*, 5ª ed. Editora da Unicamp, Campinas, São Paulo, 2011.

[7] Kinsey, L. C. *Topology of Sufaces.* springer-verlag, New York, 1993.

[8] Kosnioeski, C. *A First Course in Algebraic Topology*, 1ª ed. Press Syndicate of University of Cambrigde, New York, 1980.

[9] Lipschutz, S. *Topologia Geral.* Editora Mc-Hill do Brasil, Rio de Janeiro, 1971.

[10] Lopes, F. J. A. *Euler e as sete pontes de Könisberg.* Sociedade Brasileira de História da Matemática, Rio de Janeiro, 2015.

[11] Martinez, F. E. B. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, 5ª ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2018.

[12] Munkres, J. R. *Topology*, 2ª ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

[13] Pinto, J. A. P. *Notas sobre História da Topologia.* Universidade do Porto, Porto, 2004.